ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

CONCOURS D'ADMISSION SESSION DE 1988 · **Voie Économique**

MATHÉMATIQUES 1ÈRE ÉPREUVE DURÉE 4 H - COEFFICIENT 4

EXERCICE I

On désigne par $M_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On pose :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1°) Soit S l'application de $\mathbb{R}$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par : $S(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})}{2} \cdot I + \dfrac{(e^x - e^{-x})}{2} \cdot K$ pour tout réel x.

a) Montrer que $S(x) \cdot S(x') = S(x+x')$ pour tous réels x, x'.

b) Calculer $(S(x))^n$ pour tout entier relatif n.

2°) Soit T l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par : $T(y) = \dfrac{(1+y)}{2} \cdot I + \dfrac{(1-y)}{2} \cdot L$ pour tout réel non nul y.

Montrer que $T(y) \cdot T(y') = T(yy')$.

3°) On pose $U(x, y) = S(x) \cdot T(y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
Démontrer que la matrice $U(x, y)$ est inversible et que sa matrice inverse $U^{-1}(x, y)$ vérifie la relation :

$$U^{-1}(x, y) = T\left(\frac{1}{y}\right) \cdot S(-x)$$

4°) Donner une expression simple de la matrice : $V(x, y) = U^{-1}(x, y) \cdot J \cdot U(x, y)$

EXERCICE II

I) On considère l'application g définie par : $g : \begin{cases} \mathbb{R} - \{0, 3\} \to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{2x^2 - x - 6}{2x^2 (x-3)} \end{cases}$

1°) Déterminer les nombres réels A, B, C tels que pour tout nombre réel non nul et différent de 3, on ait :

$$g(x) = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-3}$$

2°) Déterminer l'expression des primitives de $g(x)$.

En déduire que les fonctions $f_k(x) = k\, e^{-\frac{1}{x}} \sqrt{|x^2 - 3x|}$, où $k \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$, sont solutions de l'équation :

$$\frac{f'_k(x)}{f_k(x)} = g(x) \text{ ; où } f'_k \text{ désigne la dérivée de } f_k.$$

II) On pose $f(x) = f_1(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{|x^2 - 3x|}$ pour tout nombre réel non nul.

1°) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$.

2°) Dresser le tableau de variations de f. Étudier les branches infinies.

3°) Montrer que : Si $x \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$ $f''(x) = f(x) \cdot (g'(x) + g^2(x))$.
Montrer que $f''(x)$ s'annule pour deux valeurs x_0 et x_1.
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de x_0, x_1, $f(x_0)$ et $f(x_1)$.

4°) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

T.S.V.P.

III) On désigne par h la fonction définie par :
$h(x) = \ell n\, f(x)$ si $x \in]3, +\infty[$ (ℓn = logarithme népérien).

1°) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique dans $]3, +\infty[$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution a.

2°) Dresser le tableau de variations de h. Étudier les branches infinies.

3°) Construire la courbe représentative de h.

4°) Calculer l'aire du domaine plan défini par
$$\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / a \leqslant x \leqslant 4 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant h(x)\}.$$

EXERCICE III

On considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A_1, A_2, A_3, A_4, quatre événements sur cet espace.

On pose : $S_1 = \sum_{i=1}^{4} P(A_i)$ $\qquad S_3 = \sum_{\substack{i=1 \\ i<j<k}}^{4} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$

$S_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{4} P(A_i \cap A_j)$ $\qquad S_4 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

1°) Exprimer $P(\bigcup_{i=1}^{4} A_i)$ en fonction de S_1, S_2, S_3 et S_4.

Pendant un spectacle, on a malencontreusement permuté les quatre chapeaux qui se trouvaient au vestiaire dans des cases numérotées.
On désigne par A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) l'événement : « La personne i se voit remettre son chapeau. »

2°) Calculer les valeurs de S_1, S_2, S_3 et S_4 correspondant aux événements A_i ainsi définis.

3°) Montrer que la probabilité pour qu'une personne au moins parmi les quatre ayant un chapeau à l'entrée se voit remettre son propre chapeau, est donnée par la formule :
$$p = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$
Calculer p.

4°) En déduire la probabilité pour qu'aucune personne ne se voit remettre son chapeau.

EXERCICE IV

Une urne contient m boules noires et $n-m$ boules blanches. ($m<n$).
On tire de cette urne N boules sans remise. ($N \leqslant n$).

1°) On définit une variable aléatoire X_k, $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ par :
$$\begin{cases} X_k = 1 \text{ si la } k\text{-ième boule tirée est noire,} \\ X_k = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$
Donner la loi de X_k et celle du couple (X_k, X_i) pour $i \neq k$.

2°) Soit $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ la variable hypergéométrique associée au nombre de boules noires de l'échantillon.
Calculer l'espérance mathématique E(Y) et la variance V(Y).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail